# Start:Bayes!

## Rechnen mit Wahrscheinlichkeit

Sebastian Sauer





# Rechnen mit Wahrscheinlichkeit

Lernziele: Sie können …

- die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung erläuternd definieren
- typische Relationen (Operationen) von Ereignissen anhand von Beispielen veranschaulichen
- mit Wahrscheinlichkeiten rechnen

# Überblick

- Wann addiert man Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse?
- Wann multipliziert man sie?
- Was bedeutet (Un-)Abhängigkeit zweier Ereignisse?

Klingt wild — ist aber oft ganz einfach.

# Additionssatz

# Additionssatz — Beispiel

- Würfelwurf: Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl, $A = \{2, 4, 6\}$?
- $Pr(\text{gerade Zahl}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$

Gezinkter Würfel mit $Pr(6) = 1/3$: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, *keine* 6 zu würfeln? — $2/3$





# Vereinigung von Ereignissen: Additionssatz

# Addition disjunkter Ereignisse

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ beim Würfelwurf
- Gesucht: $Pr(A)$ für $A = \{1, 2\}$
- 1 und 2 sind **disjunkt**: wirft man eine 1, hat man keine 2 geworfen

$$Pr(1 \cup 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

# Definition: Additionssatz für disjunkte Ereignisse

**Definition: Additionssatz für disjunkte Ereignisse**

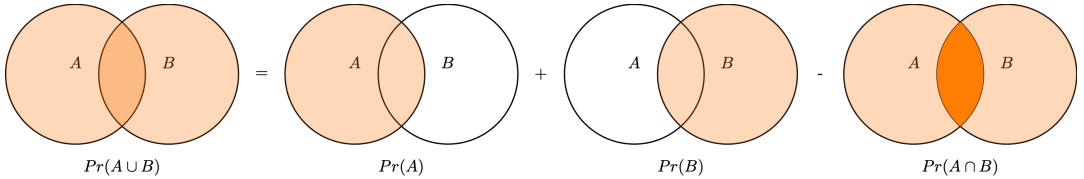
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden Ereignisse eintritt, ist die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$$

Beispiel: An einem Samstag *oder* Sonntag geboren zu sein:
$Pr(A) = 1/7 + 1/7 = 2/7$

# Addition allgemeiner (nicht-disjunkter) Ereignisse

- Bei nicht disjunkten Ereignissen wird der Schnitt $A \cap B$ bei einfacher Addition **doppelt** gezählt
- Der Überlappungsbereich muss daher abgezogen werden



# Definition: Allgemeiner Additionssatz

**Definition: Allgemeiner Additionssatz**

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden Ereignisse $A$ und $B$ eintritt, ist gleich der Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten minus ihrer gemeinsamen Wahrscheinlichkeit.

$$Pr(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

# Beispiel: Lernen und Klausur bestehen

Daten von 100 Studis (Statistik 1 und 2 bestanden, B, oder nicht, N):

| | **S1_B** | **S1_NB** | **Summe** |
|---|---|---|---|
| S2_B | 85 | 9 | 94 |
| S2_NB | 5 | 1 | 6 |
| Summe | 90 | 10 | 100 |

Mindestens eine der beiden Klausuren bestehen:

$$Pr(A) = Pr(S_1B) + Pr(S_2B) - Pr(S_1B \cap S_2B) = \frac{90 + 94 - 85}{100} = \frac{99}{100}$$

# Bedingte Wahrscheinlichkeit



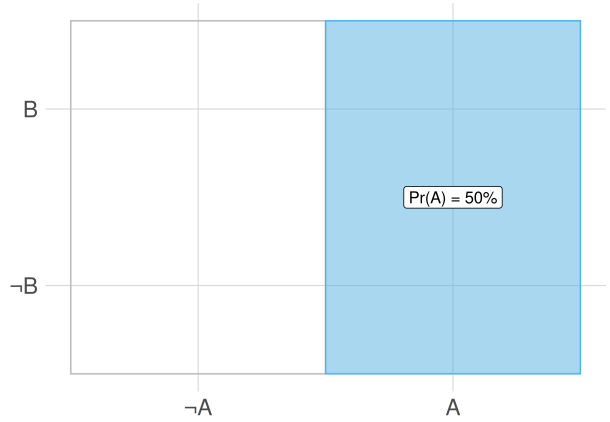
# Bedingte Wahrscheinlichkeit: Definition

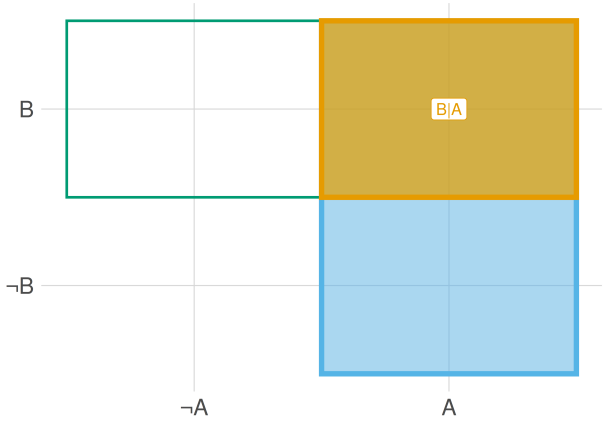
**Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit**

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass $A$ eintritt, *gegeben dass* $B$ schon eingetreten ist.

- Schreibweise: $Pr(A|B)$
- Lies: “A gegeben B” oder “A wenn B”

# Illustration: unbedingte, gemeinsame, bedingte Wahrscheinlichkeit

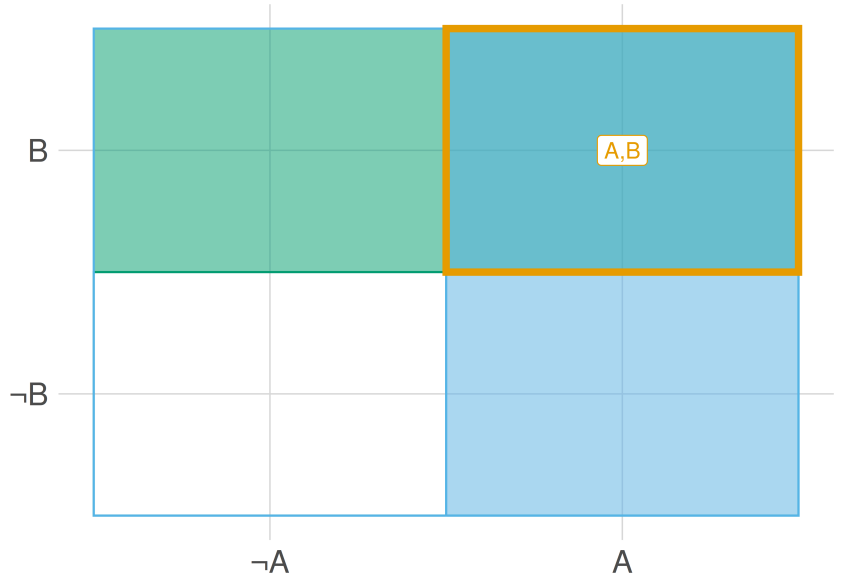



$Pr(A \cap B)$ (auch $Pr(AB)$) wird analog dargestellt.

# Gemeinsame Wahrscheinlichkeit

$$Pr(A \cap B)$$



# Bedingte Wahrscheinlichkeit — Beispiele

- $A$ = “Schönes Wetter”, $B$ = “Klausur steht an”: $Pr(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit für schönes Wetter, wenn eine Klausur ansteht
- Päpste und Männer:
  $Pr(\text{Papst}|\text{Mann}) \neq Pr(\text{Mann}|\text{Papst})$

**Merke:** Reihenfolge in der bedingten Wahrscheinlichkeit ist wichtig — $Pr(A|B) \neq Pr(B|A)$ im Allgemeinen.





# Bedingte Wahrscheinlichkeit als Filtern einer Tabelle

- 4 Tage, jeweils kalt (oder nicht) und Regen (oder nicht)
- Filtert man auf “kalt”, gibt der Anteil der Zeilen mit “Regen” die bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr(\text{Regen}|\text{kalt})$ an

$$Pr(A) = 2/4;\ Pr(B) = 2/4;\ Pr(A \cap B) = 1/4;\ Pr(A|B) = 1/2$$





# Formel: Bedingte Wahrscheinlichkeit

**Satz: Bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

Analog gilt: $Pr(B|A) = \frac{Pr(B \cap A)}{Pr(A)}$

# Beispiel: Bestehen ohne Lernen

Daten von 100 Studis (L = gelernt, NL = nicht gelernt):

| | L | NL | Summe |
|---|---|---|---|
| B | 80 | 1 | 81 |
| NB | 5 | 14 | 19 |
| Summe | 85 | 15 | 100 |

$$Pr(B|\neg L) = \frac{Pr(B \cap \neg L)}{Pr(\neg L)} = \frac{1/100}{15/100} = \frac{1}{15} \approx 7\,\%$$

# Stochastische (Un-)Abhängigkeit



# Warum ist (Un-)Abhängigkeit wichtig?

In Forschung und Alltag oft von Interesse:

- Lernen und Klausur bestehen
- Rauchen und Lungenkrebs
- Impfung und Infektion
- Werbung und Verkaufserfolg

# Unabhängigkeit — Beispiele

- Regentanz und Regen sind unabhängig
- “Es regnet in Berlin” und “In Tokio fällt eine Münze auf Kopf”
- 10× Kopf hintereinander und der nächste Münzwurf (bei fairer Münze)
- Augenfarbe und Blutgruppe

Unabhängigkeit ist ein *Spezialfall* von Abhängigkeit: viele Arten von Abhängigkeit, aber nur eine Art von Unabhängigkeit — eine *starke* Aussage.

# Definition: Stochastische Unabhängigkeit

**Definition: Stochastische Unabhängigkeit**

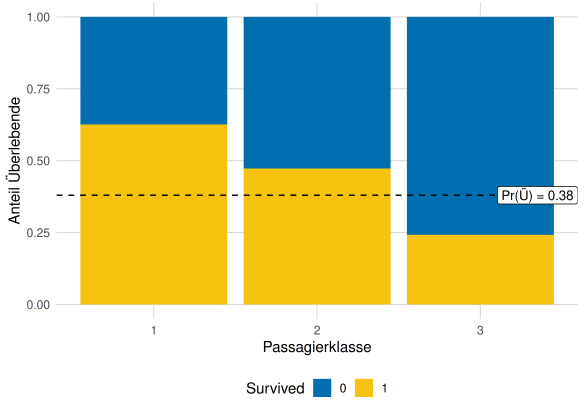
Zwei Ereignisse sind (stochastisch) unabhängig voneinander, wenn die Wahrscheinlichkeit von $A$ nicht davon abhängt, ob $B$ der Fall ist.

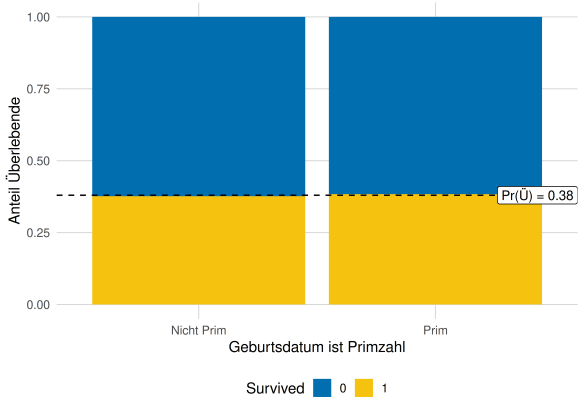
$$Pr(A) = Pr(A|B) = Pr(A|\neg B)$$

Setzt man die bedingte Wahrscheinlichkeit ein, folgt:

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$$

# Titanic-Beispiel




- Links: $Pr(\ddot{U}|K_1) \neq Pr(\ddot{U}|K_2) \neq Pr(\ddot{U}|K_3) \neq Pr(\ddot{U})$ – abhängig
- Rechts: $Pr(\ddot{U}|P) = Pr(\ddot{U}|\neg P) = Pr(\ddot{U})$ – unabhängig

# Definition: Stochastische Abhängigkeit

**Definition: Stochastische Abhängigkeit**

Liegt keine Unabhängigkeit vor, spricht man von (stochastischer) *Abhängigkeit*.

$$Pr(A|B) \neq Pr(A) \neq Pr(A|\neg B)$$

Beispiel: “Lernen” und “Klausur bestehen” sind abhängig — unsere Einschätzung zu $Pr(K)$ ändert sich, je nachdem ob $L$ vorliegt oder nicht.

# Unabhängigkeit ist symmetrisch

$$Pr(A|B) = Pr(A) \leftrightarrow Pr(B|A) = Pr(B)$$

**Achtung:** Stochastische Unabhängigkeit und *kausale* Unabhängigkeit sind unterschiedliche Dinge (Henze, 2019) — stochastische Unabhängigkeit impliziert *nicht* kausale Unabhängigkeit.





# Wahrscheinlichkeit gemeinsamer Ereignisse: Multiplikationssatz

# Multiplikationssatz — gemeinsame Wahrscheinlichkeit

- Interessiert an der Wahrscheinlichkeit, dass **beide** Ereignisse $A$ und $B$ eintreten
- Schreibweise: $A \cap B$ (“A und B”) bzw. $AB$

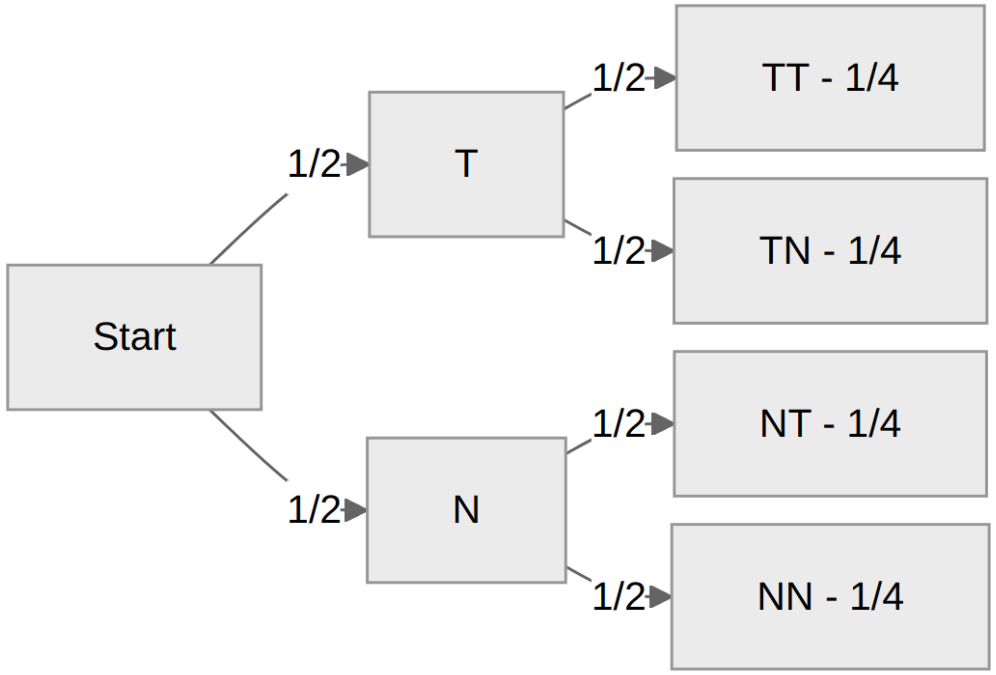
Beispiel Regen/Kälte:

- $Pr(K|R)$: Wahrscheinlichkeit für Kälte, *gegeben* dass es regnet
- $Pr(K \cap R)$: Wahrscheinlichkeit, dass es *gleichzeitig* kalt ist und regnet





# Zweifacher Münzwurf: Baumdiagramm




Knoten = Ergebnisse, Kanten = Wahrscheinlichkeiten, Blätter = Endresultate, Pfad = Weg vom Start zu einem Blatt.

# Formel: Multiplikationssatz (unabhängige Ereignisse)

**Satz: Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse**

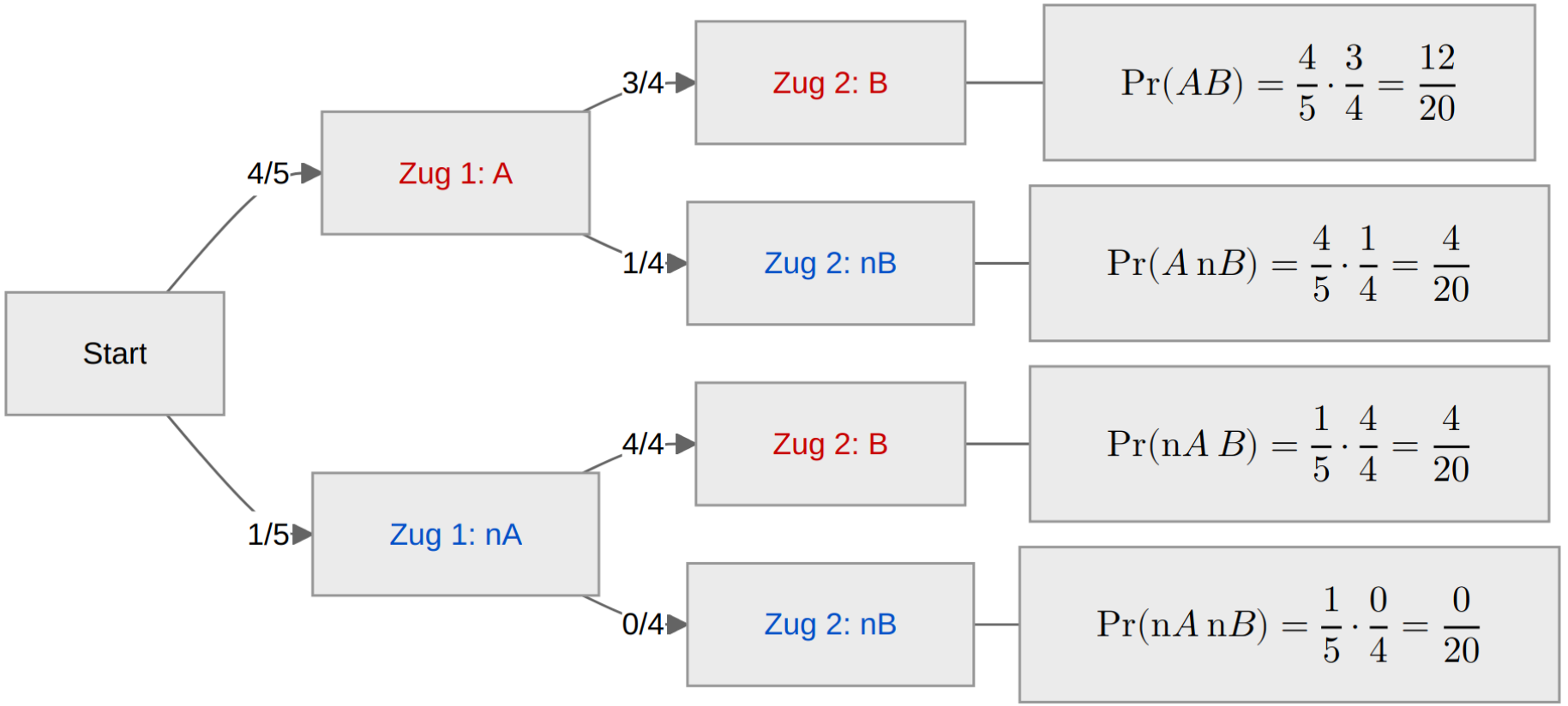
$$Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$$

Symmetrie: $Pr(A \cap B) = Pr(B \cap A)$

Beispiel: $Pr(K_1 \cap K_2) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ (2× Kopf bei fairer Münze)

# Gemeinsame Wahrscheinlichkeit abhängiger Ereignisse

Urne mit 5 Kugeln (4 rot, 1 blau), Ziehen *ohne Zurücklegen*:



# Gemeinsame Wahrscheinlichkeit: Rechnung

$$Pr(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 4/5 \cdot 3/4 = 3/5$$

# Formel: Gemeinsame Wahrscheinlichkeit (allgemein)

**Satz: Gemeinsame Wahrscheinlichkeit**

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei abhängige Ereignisse $A$ und $B$ *gemeinsam* eintreten, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeit von $A$ und der bedingten Wahrscheinlichkeit von $B$ gegeben $A$.

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B|A)$$

Bei Unabhängigkeit vereinfacht sich das zu $Pr(A) \cdot Pr(B)$.

# Kettenregel

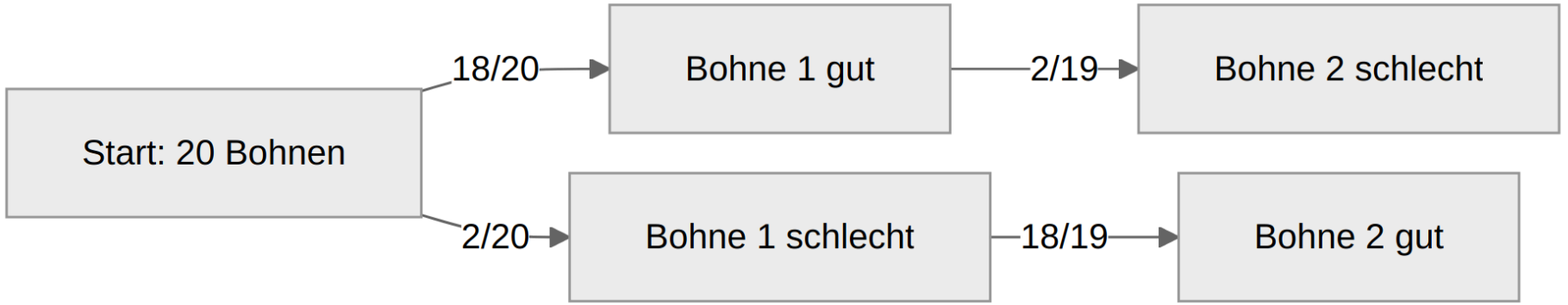
**Definition: Kettenregel**

Man spricht von der *Kettenregel*, wenn man die gemeinsame Wahrscheinlichkeit auf die bedingte zurückführt.

$$Pr(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

# Beispiel: Bertie Botts Bohnen

- 20 Bohnen, davon 2 “scheußlich”; 2 Bohnen ziehen (ohne Zurücklegen)
- Gesucht: *genau eine* scheußliche Bohne



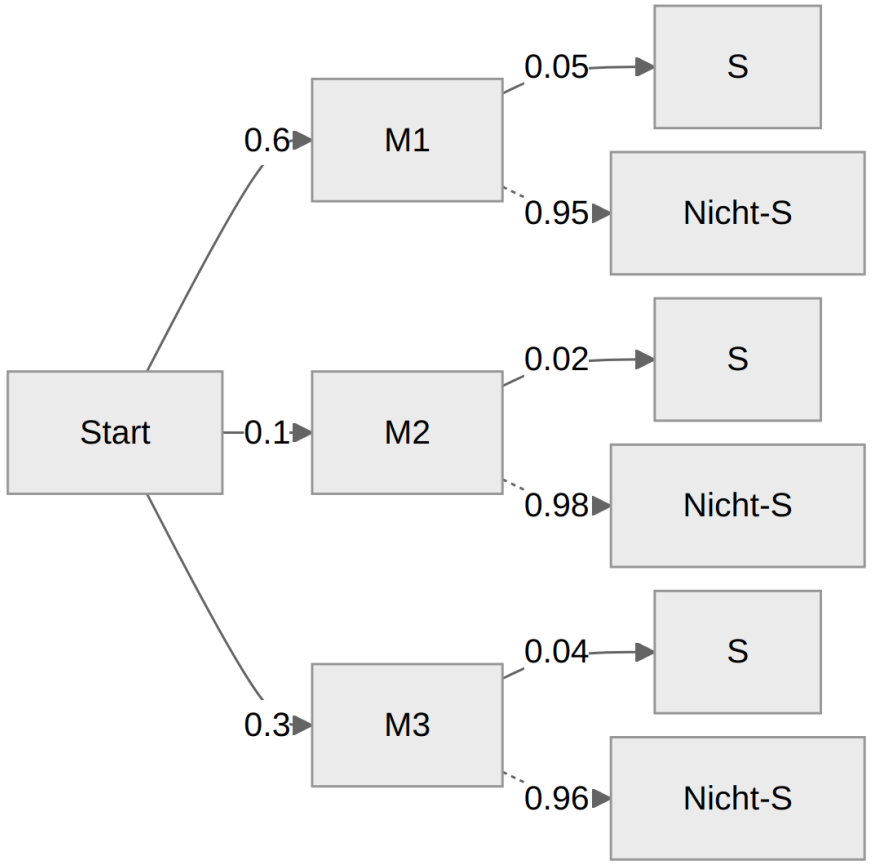

- Pfad 1 (schlecht, dann gut) + Pfad 2 (gut, dann schlecht) = Wahrscheinlichkeit für genau eine schlechte Bohne ≈ 19 %

# Totale Wahrscheinlichkeit

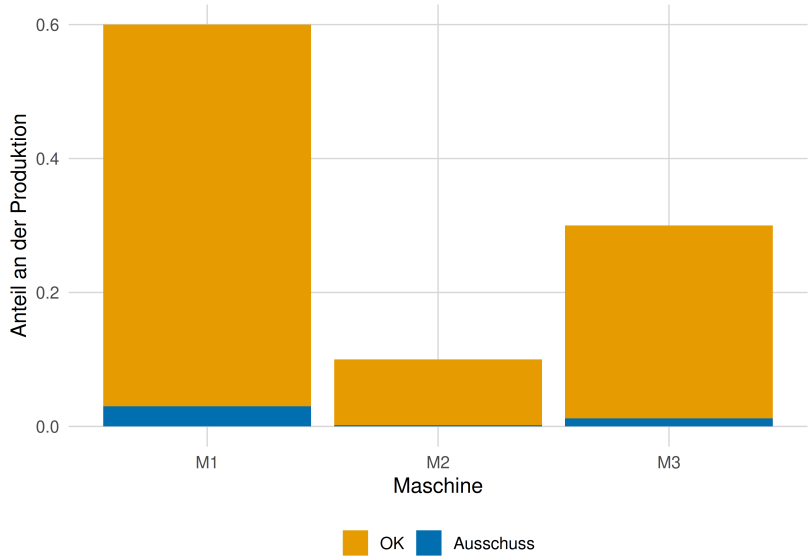
# Totale Wahrscheinlichkeit — Beispiel

3 Maschinen produzieren einen Artikel (Anteil 60/10/30 %), mit Ausschussquote 5/2/4 %.

# Totale Wahrscheinlichkeit — Baumdiagramm



# Totale Wahrscheinlichkeit — Rechnung




$$Pr(S') = 0.6 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.04 = 0.044 = 4{,}4\,\%$$

# Formel: Totale Wahrscheinlichkeit

**Satz: Totale Wahrscheinlichkeit**

Bilden die Ereignisse $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ein vollständiges Ereignissystem und ist $S$ ein beliebiges Ereignis, dann gilt:

$$Pr(S') = \sum_{i=1}^{n} Pr(M_i) \cdot Pr(S|M_i)$$

In Worten: Die totale Wahrscheinlichkeit ist die Summe der gewichteten Teil-Wahrscheinlichkeiten.

# Zusammenfassung

- **Additionssatz**: $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$ (“mindestens eines von A, B”)
- **Bedingte Wahrscheinlichkeit**: $Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$
- **(Un-)Abhängigkeit**: $Pr(A) = Pr(A|B)$ bei Unabhängigkeit
- **Multiplikationssatz / Kettenregel**: $Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B|A)$ (“beide von A, B”)
- **Totale Wahrscheinlichkeit**: gewichtete Summe über ein vollständiges Ereignissystem





# Vielen Dank!

Fragen?

Henze, N. (2019). *Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie: Inkl. zahlreicher Erklärvideos*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-59563-3



