Start:Bayes!

Hallo, Wahrscheinlichkeit

Sebastian Sauer



Hallo, Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitstheorie: die Mathematik des Zufalls



Wozu brauche ich dieses Kapitel?

Im wirklichen Leben sind Aussagen so gut wie nie sicher:

- “Weil sie so schlau ist, ist sie erfolgreich.”
- “In Elektroautos liegt die Zukunft.”
- “Das klappt sicher, meine Meinung.”
- “Der nächste Präsident wird XYZ.”

Wahrscheinlichkeit hilft, solche Aussagen zu **präzisieren**.

Lernziele

Sie können …

- die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie erläuternd definieren
- die Definitionen von Wahrscheinlichkeit beschreiben
- typische Relationen (Operationen) von Ereignissen anhand von Beispielen veranschaulichen
- erläutern, was eine Zufallsvariable ist

Grundbegriffe

Zufallsvorgang



Definition: Zufallsvorgang

Ein *Zufallsvorgang* (Zufallsexperiment) ist eine klar beschriebene Tätigkeit, deren Ergebnis nicht sicher ist. Die Menge möglicher Ergebnisse ist aber bekannt, und die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses lässt sich quantifizieren.

Typische Zufallsvorgänge

- **Würfeln**: Augenzahl 1–6
- **Münzwurf**: Kopf oder Zahl
- **Lottoziehung**: 6 aus 49
- **Kartenziehen**: eine Karte aus 52
- **Glücksrad**: welches Feld bleibt stehen?

Zufall heißt: unbekannt, nicht ursachenlos



Vorsicht

Zufall heißt nicht, dass ein Vorgang keine Ursachen hätte. Der Fall einer Münze gehorcht den Gesetzen der Gravitation — kennten wir alle Ausgangsbedingungen exakt, wäre er vorhersagbar. “Zufall” versteht man daher besser als **“unbekannt”**.



Ergebnisraum

Definition: Ergebnisraum

Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsvorgangs bilden eine Menge, den *Ergebnisraum* Ω. Die Elemente ω von Ω heißen *Ergebnisse*.



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ergebnisraum — Beispiele

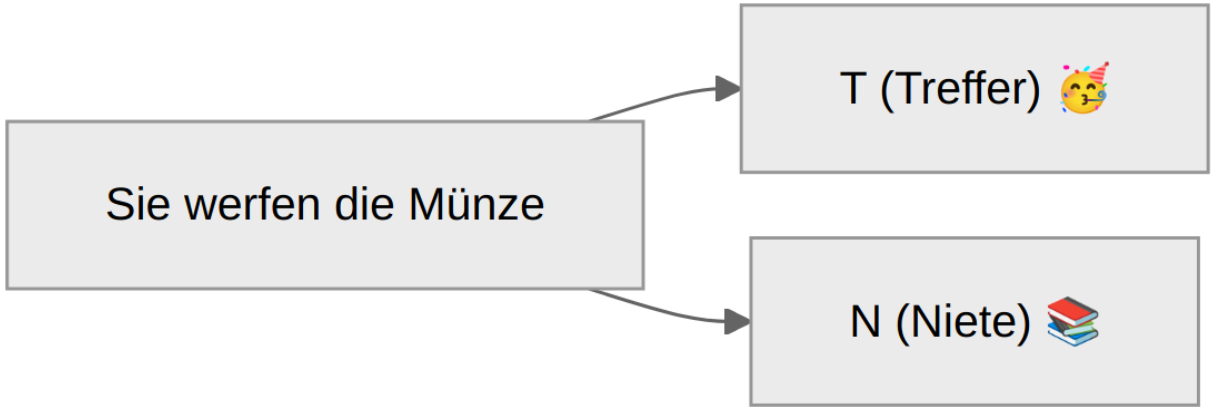
- **Münzwurf**: $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$
- **Lotto**: alle Kombinationen von 6 aus 49 Zahlen (ca. 14 Mio.)
- **Kartenziehen**: alle 52 Karten
- **Glücksrad** (4 Farbfelder): $\Omega = \{\text{Rot}, \text{Grün}, \text{Blau}, \text{Gelb}\}$

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung baut auf der Mengenlehre auf.

Ereignis

Definition: Ereignis

Jede Teilmenge von Ω heißt *Ereignis*: $A \subseteq \Omega$.



Beispiel: “Augenzahl 6 liegt oben” $\rightarrow A = \{6\}$

Unmögliches und sicheres Ereignis

Definition: Unmögliches und sicheres Ereignis

Die leere Menge $\varnothing$ heißt das *unmögliche* Ereignis, der Grundraum Ω heißt das *sichere Ereignis*.

- Unmöglich: “Der Würfel zeigt eine 7.”
- Sicher: “Nach dem Wurf liegt eine Zahl zwischen 1 und 6 oben.”

Elementarereignis

Definition: Elementarereignis

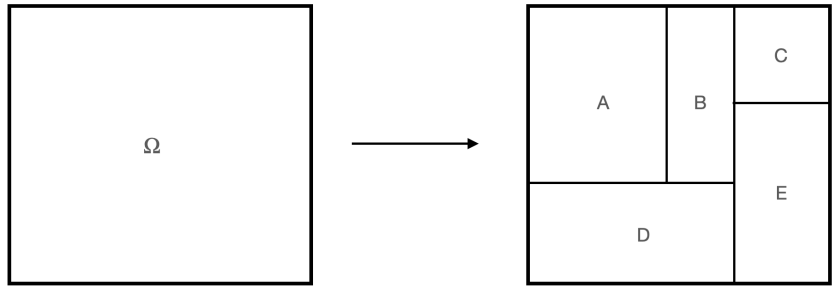
Jede einelementige Teilmenge $\{\omega\}$ von Ω heißt *Elementarereignis*.

- Würfeln: $A = \{1\}$
- Klausur: $\Omega = \{\text{bestehen}, \text{nicht bestehen}\}$, ein Elementarereignis tritt ein

Vollständiges Ereignissystem

Definition: Vollständiges Ereignissystem

Wird der Grundraum Ω vollständig in paarweise disjunkte Ereignisse zerlegt, so bilden diese Ereignisse ein *vollständiges Ereignissystem*.



Beispiel Würfel: A = gerade Zahlen, B = ungerade Zahlen

Mächtigkeit

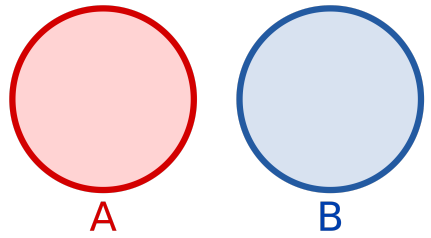
Definition: Mächtigkeit

Die Anzahl der Elementarereignisse eines Ergebnisraums nennt man die *Mächtigkeit*, Symbol $|\Omega|$.

Beispiel: Würfel mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ hat $|\Omega| = 6$.

Disjunkte Ereignisse

Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ sind *disjunkt*, wenn ihre Schnittmenge leer ist: $A \cap B = \emptyset$



Beispiel: “gerade Augenzahl” ($\{2, 4, 6\}$) und “ungerade Augenzahl” ($\{1, 3, 5\}$)

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Von der Logik zur Wahrscheinlichkeit

Klassische Logik: “Alle Schwäne sind weiß.” → “Dies ist ein Schwan.” → “Dieser Schwan ist weiß.”

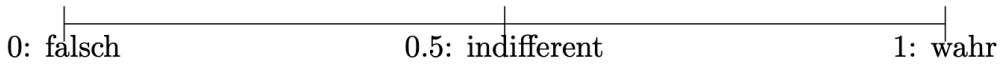
Mit Wahrscheinlichkeit: “Die meisten Schwäne sind weiß.” → “Dies ist ein Schwan.” → “Dieser Schwan ist **wahrscheinlich** weiß.”

Wahrscheinlichkeit = Erweiterung der Logik (Jaynes & Bretthorst, 2003)



Wahrscheinlichkeit als Erweiterung der Logik

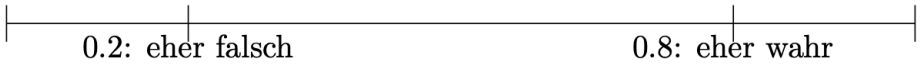
In formaler Logik: ein Ereignis ist *falsch* (0) oder *wahr* (1). Der Raum dazwischen ist die Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$.



Definition von Wahrscheinlichkeit

Definition: Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für die Plausibilität einer Aussage A, gegeben Hintergrundinformationen D: $Pr(A|D)$. Sie liegt zwischen 0 (unmöglich) und 1 (sicher).



Wahrscheinlichkeit als Wissenszustand

Wahrscheinlichkeit existiert nicht wie ein Stein — sie ist eine Art von Wissen (Jaynes & Bretthorst, 2003).

- Unbedarfter Spieler: “Ich habe keinen Grund, an der Fairness zu zweifeln” → $Pr(Z|F) = 0.5$
- Betrüger, der die Münze kennt → $Pr(Z|B) = 0.75$

Dieselbe Münze, unterschiedliches Wissen, unterschiedliche Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeit ist immer bedingt

Unvollständig: “Morgen regnet es mit 70 % Wahrscheinlichkeit.”

Besser: $Pr(\text{Regen} \mid \text{Wettermodell X})$

Symptome S eines Hautkrebses: $Pr(K) = 0{,}001$, aber $Pr(K \mid S) \gg 0{,}001$

Hinweis

Sagt jemand “Die Wahrscheinlichkeit von A ist x %”, frag immer: gegeben welcher Annahmen, welcher Evidenz?

Indifferenzprinzip

Definition: Indifferenzprinzip

In Abwesenheit von Informationen, die bestimmte Ereignisse bevorzugen, sollten alle möglichen Ereignisse als gleich wahrscheinlich angesehen werden.

$$Pr(A) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}$$

Beispiel: $Pr(6 \text{ beim } \text{Würfeln}) = 1/6$

Laplace-Experiment

Definition: Laplace-Experiment

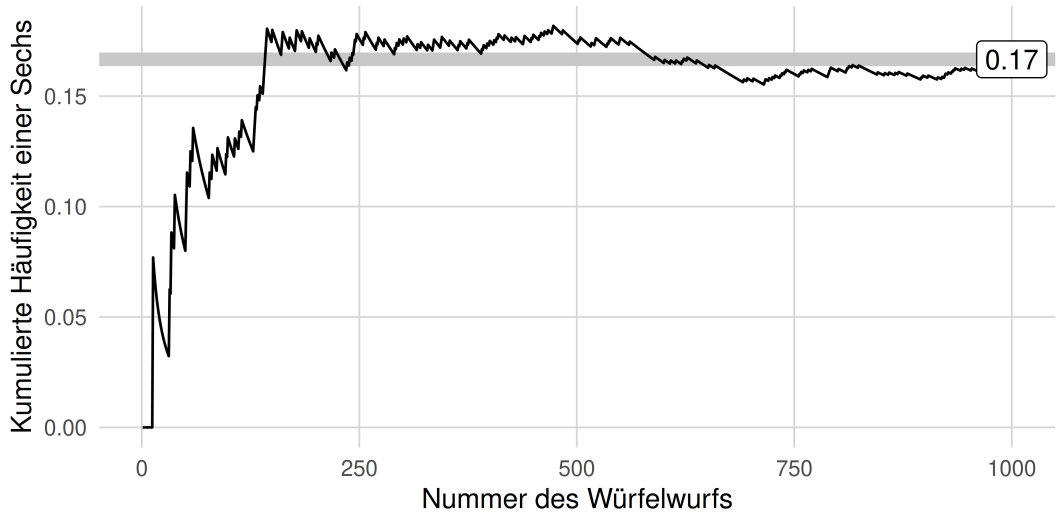
Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, nennt man *Laplace-Experiment*.

$$Pr(A) = \frac{\text{Anzahl Treffer}}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}}$$

Frequentistische Definition

Wenn Elementarereignisse **nicht** gleichwahrscheinlich sind: einfach ausprobieren.

Ein (angeblich fairer) Würfel wird 1000-mal geworfen — Anteil der 6 beobachten:



Kolmogorovs Axiome

1. **Nichtnegativität**: Wahrscheinlichkeiten sind nie negativ
2. **Normierung**: $Pr(\Omega) = 1, Pr(\emptyset) = 0$
3. **Additivität**: Sind A, B disjunkt, gilt
   $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$



Relationen von Ereignissen



Relationen im Überblick

Definition: Relation

Eine Relation zweier Ereignisse bezeichnet die Beziehung, in der die beiden Ereignisse zueinander stehen.

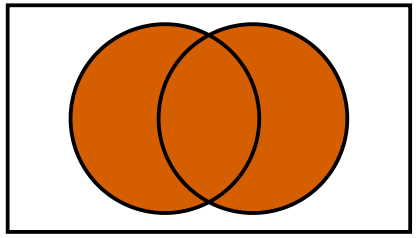
Typische Relationen: Gleichheit, Ungleichheit, Vereinigung, Schnitt

Werkzeug zur Veranschaulichung: **Venn-Diagramme**

Vereinigung von Ereignissen

Definition: Vereinigung von Ereignissen

$C = A \cup B$ besteht aus allen Elementarereignissen von A **oder** B.

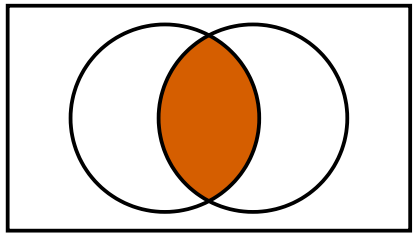


R: `union(A, B)`

(Durch-)Schnitt von Ereignissen

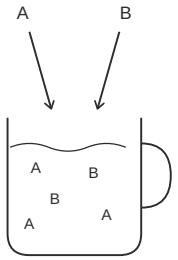
Definition: Schnittmenge von Ereignissen

$A \cap B$ umfasst genau die Elementarereignisse, die Teil **beider** Ereignisse sind (“A und B”).

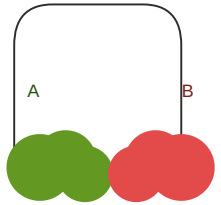


R: `intersect(A, B)`

Eselsbrücke: Vereinigung vs. Schnitt



Vereinigung
(Tasse / cup)

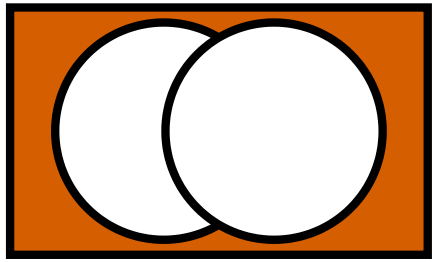


Schnittmenge
(Käseglocke / cap)

Komplementärereignis

Definition: Komplementärereignis

B ist Komplementärereignis zu A, wenn es genau die Elementarereignisse von Ω umfasst, die **nicht** zu A gehören: $\bar{A}$ oder $\neg A$.

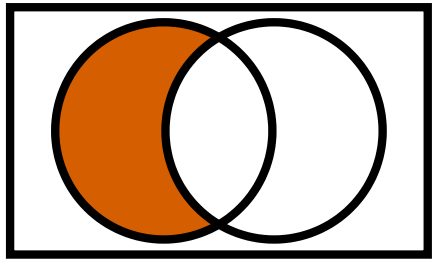


Beispiel: A = “gerade Augenzahl” → $\neg A$ = “ungerade Augenzahl”

Logische Differenz

Definition: Logische Differenz

$A \setminus B$ besteht aus den Elementarereignissen von A, die **nicht** zugleich in B sind (“A minus B”).



Vorsicht

$A \setminus B \neq B \setminus A$ — Achtung, Asymmetrie! R: `setdiff(A, B)`

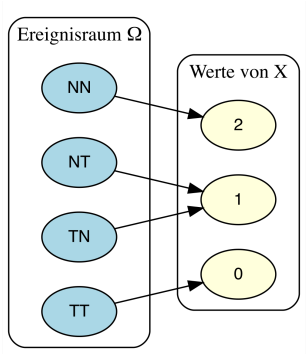
Zufallsvariable



Von Ereignissen zu Zahlen

Definition: Zufallsvariable

Die Zuordnung der Elementarereignisse eines Zufallsexperiments zu genau einer Zahl $\in \mathbb{R}$ nennt man *Zufallsvariable*.



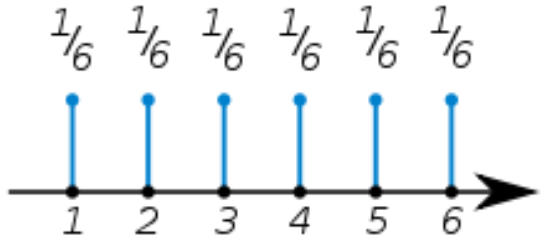
Schreibweise: $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Diskrete Zufallsvariable

Definition

Bei einer diskreten Zufallsvariablen sind nur bestimmte Realisationen möglich (meist natürliche Zahlen: 0, 1, 2, …).

- Anzahl Bewerbungen bis zum ersten Interview
- Anzahl Anläufe bis zum Bestehen der Klausur
- Anzahl Treffer beim Losekauf



Zufallsvariable

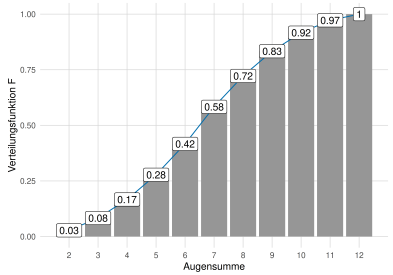
Wahrscheinlichkeitsverteilung & Verteilungsfunktion

Eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* ordnet jeder Realisation einer Zufallsvariablen eine Wahrscheinlichkeit zu.

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} Pr(X = x_i)$$

Definition: Verteilungsfunktion

F gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass X eine Realisation $\leq x$ annimmt.



Zufallsvariable

Stetige Zufallsvariable

Definition: Stetige Zufallsvariable

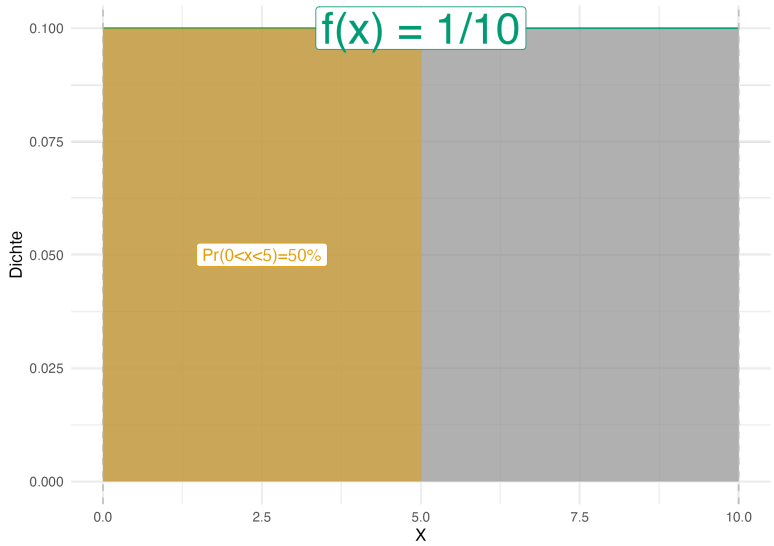
Eine stetige Zufallsvariable gleicht einer diskreten, nur dass alle Werte in einem Intervall erlaubt sind.

Beispiele: Spritverbrauch, Körpergewicht, Schnabellängen, Blitzer-Geschwindigkeit

Beispiel: Warten auf den Bus

Wartezeit gleichverteilt zwischen 0 und 10 Minuten.

- $Pr(X = 42\text{s exakt}) \approx 0$ — die Fläche eines Punktes ist Null
- $Pr(0 < X < 5\ \text{Min}) = 50\,\%$

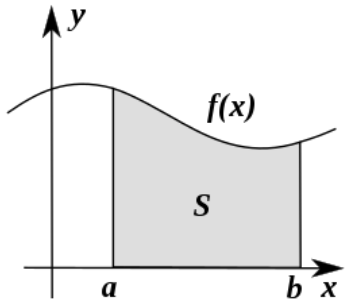


Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsdichte

Definition: Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Dichte $f(x)$ gibt an, wie viel Wahrscheinlichkeitsmasse pro Einheit von X an der Stelle x liegt.



Für stetige X: $Pr(X = x_j) = 0$ für jedes einzelne x_j — praktisch relevant sind **Intervalle**.

Zusammenfassung

- Zufallsvorgang, Ergebnisraum Ω, Ereignis $A \subseteq \Omega$
- Wahrscheinlichkeit: Maß für Plausibilität, immer **bedingt** auf Hintergrundwissen
- Indifferenzprinzip, Laplace, frequentistischer Zugang, Kolmogorov-Axiome
- Relationen: Vereinigung, Schnitt, Komplement, Differenz
- Zufallsvariable: diskret vs. stetig, Verteilung, Dichte



Vielen Dank!

Fragen?

Jaynes, E. T., & Bretthorst, G. L. (2003). *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press.

