Start:Bayes!

Populationsinferenz

Sebastian Sauer



Lernziele

Nach diesem Kapitel können Sie …

- Populationsinferenz definieren und von der Deskriptivstatistik abgrenzen
- erläutern, warum inferenzstatistische Schlüsse notwendig Ungewissheit enthalten
- Ungewissheit zu Regressionskoeffizienten von Ungewissheit zur Vorhersagegenauigkeit (σ) unterscheiden
- den Begriff des Konfidenzintervalls erläutern und interpretieren
- frequentistische und Bayes-Inferenz gegenüberstellen
- den p-Wert informell definieren und typische Fehlinterpretationen benennen
- statistische Signifikanz sowie Null- und Alternativhypothese erläutern

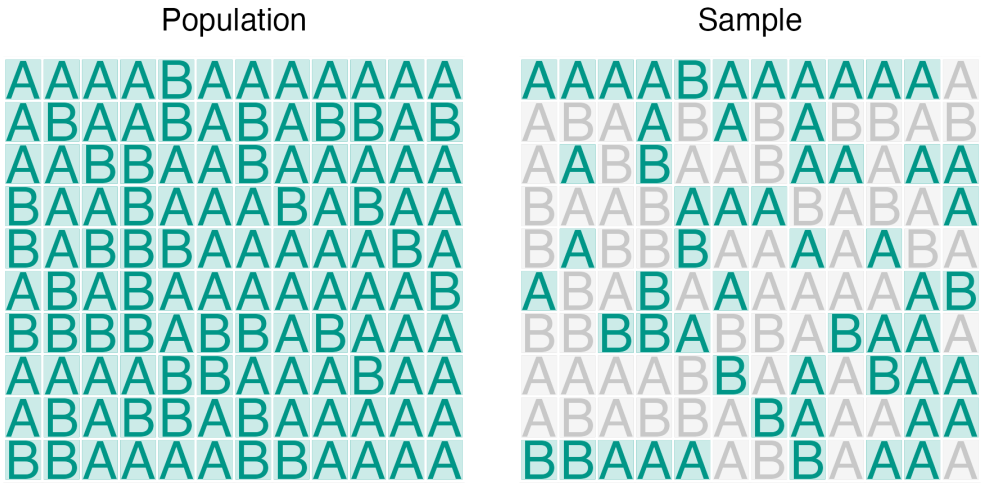
Schließen von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit

Vom Teil aufs Ganze

- **Populationsinferenz**: Schließen von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit
- Frage: Was sagt mein Datensatz (Stichprobe) über die zugrundeliegende Grundgesamtheit (Population) aus?
- Beispiel: Anteil A der R-Fans unter *allen* Studierenden schätzen — auf Basis einer Stichprobe

Grundproblem: Wir wollen Aussagen über die Population, haben aber nur einen Ausschnitt (Stichprobe) davon.

Population vs. Stichprobe



- Stichprobe: 42 % R-Fans, $p = 0{,}42$
- Schluss auf Population: $\pi = 0{,}42$ (Punktschätzer)

> **Hinweis**
>
> Lateinische Buchstaben (z. B. p) für Stichproben-Kennwerte, griechische (π) für Populations-Kennwerte.

Definition: (Populations-)Inferenzstatistik

Definition: (Populations-)Inferenzstatistik

Verfahren zum Schließen von *Statistiken* (Kennzahl einer Stichprobe) auf *Parameter* (Kennzahl einer Grundgesamtheit). Inferenz = Schließen: aus vorliegendem Wissen wird neues Wissen generiert.

Zwei Hauptarten: (1) Populationsinferenz, (2) Kausalinferenz.

Kennwerte: Stichprobe vs. Population

Kennwert	Stichprobe	Population	Schätzwert
Mittelwert	$\bar{X}$	μ	$\hat{\mu}$
Streuung	sd	σ	$\hat{\sigma}$
Anteil	p	π	$\hat{\pi}$
Korrelation	r	ρ	$\hat{\rho}$
Regression	b	β	$\hat{\beta}$

Da Populationsparameter fast nie sicher bekannt sind, begnügt man sich mit **Schätzwerten** (“Dach”).

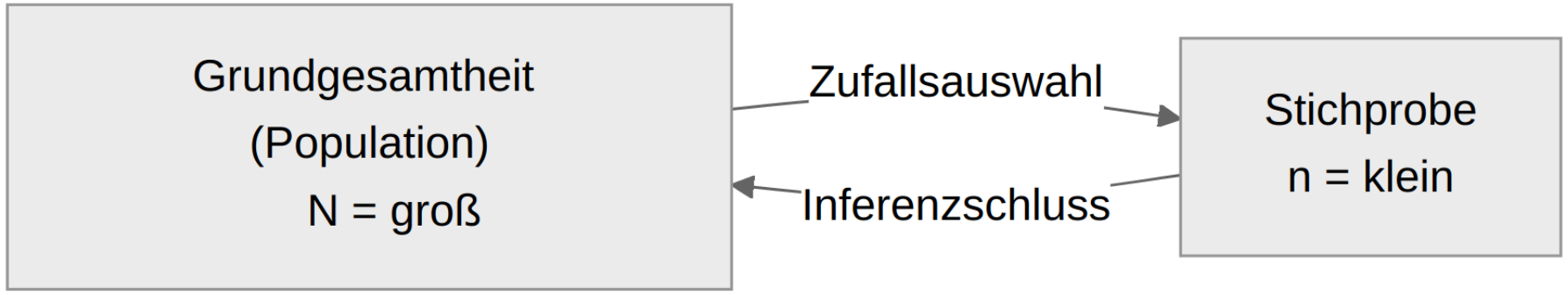
Was ist Populationsinferenz?

Definition: Populationsinferenz

Definition: Populationsinferenz

Teilbereich der Statistik, der von den Daten einer begrenzten Stichprobe auf eine zugrundeliegende Grundgesamtheit verallgemeinert (schließt).

- Deskriptivstatistik (Beschreiben) und Inferenzstatistik (Erklären/Verallgemeinern) gehen Hand in Hand



Inferenz beinhaltet Ungewissheit

- Man kennt nur einen Teil (Stichprobe) des Ganzen (Population)
- Aus diesem begrenzten Wissen resultiert notwendig **Ungewissheit** über die Population

Wichtig

Nichts Genaues weiß man nicht: Schließt man vom Teil aufs Ganze, geschieht das unter Unsicherheit — man spricht von *Ungewissheit*.

Definition: Zufälliges Ereignis

Definition: Zufälliges Ereignis

Ein Ereignis, das nicht (komplett) vorherzusehen ist (z. B. Augenzahl beim Würfeln). Zufällig bedeutet nicht zwangsläufig ursachenlos — nur sind die genauen Randbedingungen meist nicht ausreichend bekannt.

Ungewissheit unterschiedlich präzise formulieren

- “Morgen regnet’s” $\Leftrightarrow$ mit $p = 97\%$ gibt es morgen mehr als 0 mm Niederschlag
- “Methode A ist besser als B” $\Leftrightarrow$ mit 57 % Wahrscheinlichkeit ist der Mittelwert von Y für A höher als für B
- “Die Maschine fällt bald aus” $\Leftrightarrow$ mit 97 % Wahrscheinlichkeit Ausfall in 1–3 Tagen
- “Die Investition lohnt sich” $\Leftrightarrow$ Erwartungswert 42 €; mit 90 % zwischen −10.000 € und 100.000 €

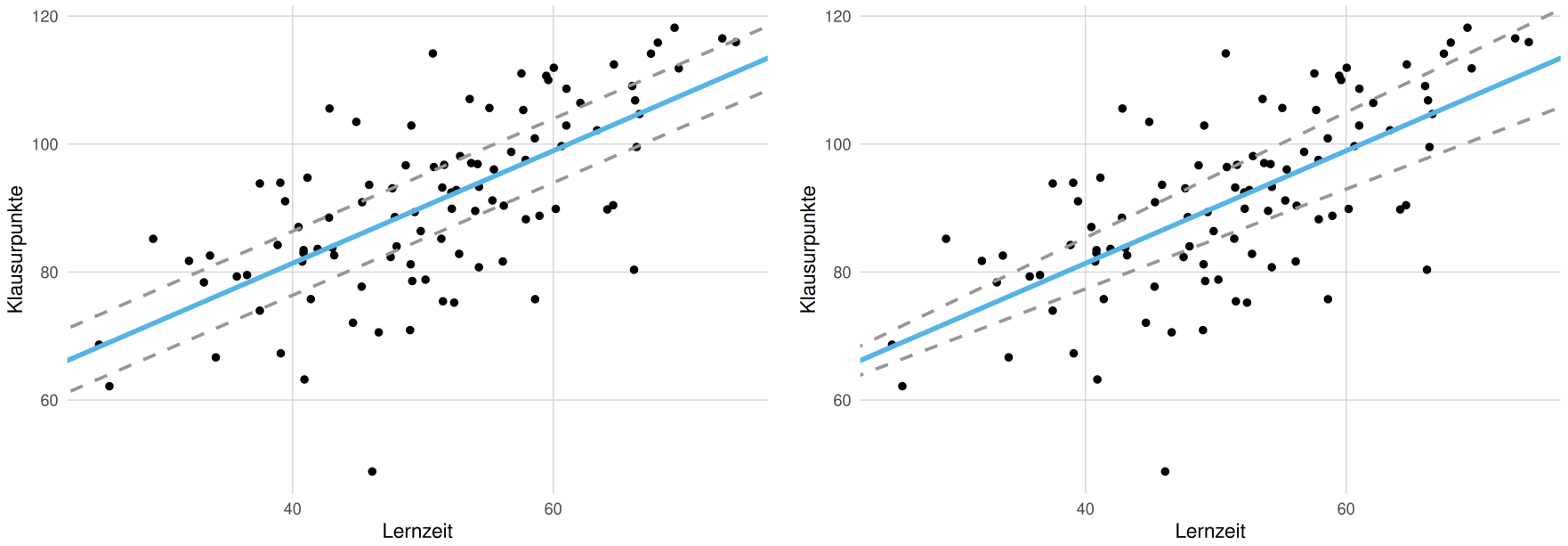


Zwei Arten von Ungewissheit

Im Regressionsmodell gibt es (mindestens) zwei Arten von Ungewissheit:

1. Wie (un)gewiss ist man sich über die **Regressionsgewichte** (β_0, β_1)?
2. Wie (un)gewiss ist man sich über die **Vorhersagegenauigkeit** (σ)?

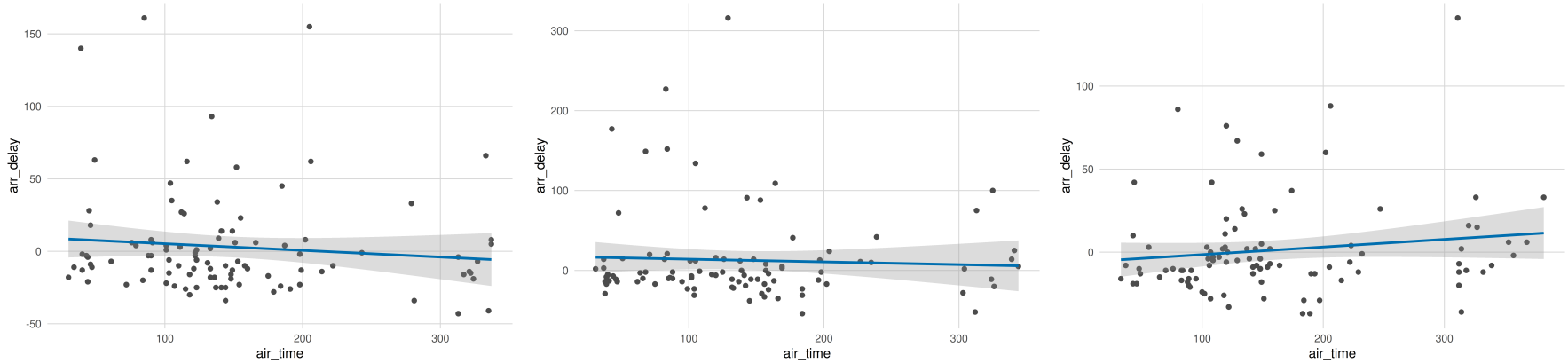
Ungewissheit der Regressionsgeraden



Die Regressionsgerade könnte “höher/niedriger aufgehängt” sein oder mehr/weniger steigen — wir wissen es nicht exakt.

Warum schwanken Koeffizienten?

- Verschiedene Zufallsstichproben aus derselben Population liefern **unterschiedliche** Regressionskoeffizienten

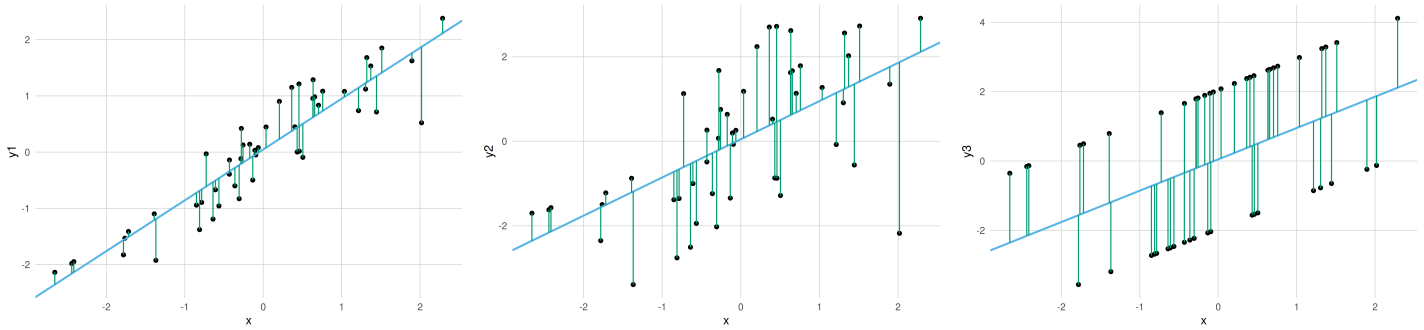


Wichtig

Stichproben-Kennwerte schwanken um den tatsächlichen Wert in der Population herum.

Sigma: Ungewissheit der Vorhersagegegenauigkeit

- Selbst bei sicherer Lage der Regressionsgeraden bleibt Ungewissheit: Wie *genau* sind Vorhersagen?
- Ausgedrückt durch R^2 oder σ



Definition: Sigma

σ gibt (grob) den mittleren Vorhersagefehler des Modells an — wie weit eine Vorhersage im Schnitt vom wahren Wert entfernt ist.

Ungewissheit muss angegeben werden

Wichtig

Schließt man auf eine Population (schätzt Modellparameter), sollte stets die (Un-)Genauigkeit der Schätzung mit angegeben werden.

Im Regressionsmodell betrifft das zwei Stellen:

1. Präzision der Regressionsgeraden (β_0, β_1)
2. Modellgüte / Vorhersagefehler (R^2 bzw. σ)

Konfidenzintervall

- Statt eines einzelnen **Punktschätzers** gibt man einen **Schätzbereich** an
- Synonym: **Konfidenzintervall**
- Beispiel: 95 %-Schätzbereich für Achsenabschnitt ca. 36–56 Punkte; Steigung ca. 0,7–1,1 Punkte/Stunde

Definition: Konfidenzintervall

Oberbegriff für Schätzbereiche von Parametern. Die Grenzen markieren einen Bereich plausibler Werte für den Parameter.

Interpretation im Bayes-Kontext

> “Laut Modell liegt der gesuchte Anteil der R-Fans mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im Bereich von 40 bis 44 Prozentpunkten.”

Im Bayes-Kontext ist ein Konfidenzintervall unmittelbar als Wahrscheinlichkeitsaussage interpretierbar.

Frequentistische Inferenz vs. Bayes-Inferenz



Frequentistische vs. Bayes-Inferenz

Frequentismus

- Fehlentscheidungen auf lange Sicht kontrollieren
- kein Vorwissen einbezogen
- Wahrscheinlichkeit = relative Häufigkeit
- keine Wahrscheinlichkeitsaussage zu Parametern möglich

Bayes

- Wahrscheinlichkeit einer Hypothese korrekt bemessen
- Vorwissen (Prior) fließt explizit ein
- Wahrscheinlichkeitsaussagen für Hypothesen möglich
- rechenintensiver, erst neuerdings praktikabel

Der p-Wert

> Wahrscheinlichkeit, ein Ergebnis zu erhalten, das mindestens so extrem ist wie das beobachtete — unter der Annahme, dass es keinen Effekt gibt.

- Man nimmt an: kein Effekt (Nullhypothese)
- Frage: Wie überraschend wären die Daten unter dieser Annahme?
- p-Wert = diese “Überraschungs-Wahrscheinlichkeit”

p-Wert: häufige Fehlinterpretationen

Der p-Wert wird oft falsch verstanden.

- ❌ Der p-Wert gibt die Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese (oder Forschungshypothese) an
- ❌ Der p-Wert zeigt ein inhaltlich bedeutsames Ergebnis an



Wichtig

Ein frequentistisches Konfidenzintervall macht keine Wahrscheinlichkeitsaussage über einen Populationswert — sondern eine Aussage über wiederholtes Stichprobenziehen.

Bayes-Inferenz: Posteriori-Verteilung

Zentrale Statistik: die **Posteriori-Verteilung** — beantwortet: “Wie wahrscheinlich ist die Hypothese, nachdem wir die Daten kennen?”

In der Bayes-Statistik sind Aussagen erlaubt wie:

> Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % ist der neue Webshop besser als der alte.

> Mit einer Wahrscheinlichkeit von 89 % liegt die Wirksamkeit zwischen 0,1 und 0,4.



Statistische Signifikanz

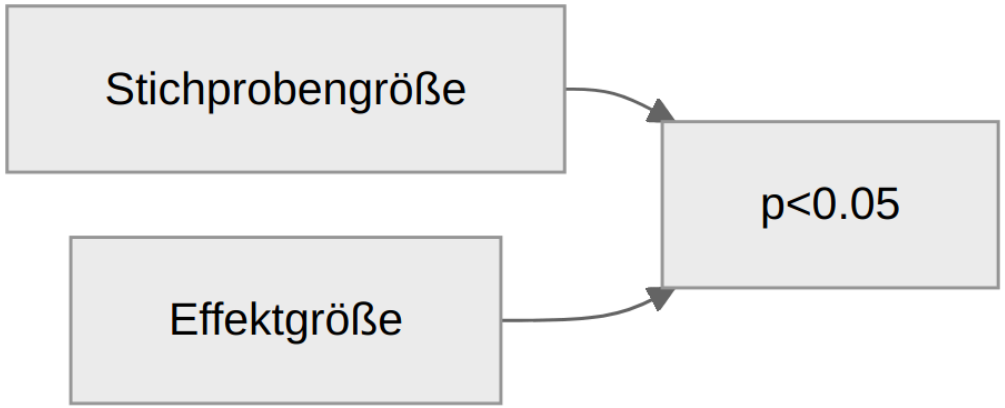
- Frequentismus: signifikant, wenn $p < .05$
- Hier verwendete (übergreifende) Definition:

Definition: Statistische Signifikanz

Ist der Wert Null nicht im Schätzbereich enthalten, liegt ein statistisch signifikantes Ergebnis vor.

Signifikanz hängt von der Stichprobengröße ab

Signifikanz ist auch eine Funktion der **Stichprobengröße** — große Stichproben werden fast immer signifikant.



Null- und Alternativhypothese

Definition: Exakte Nullhypothese

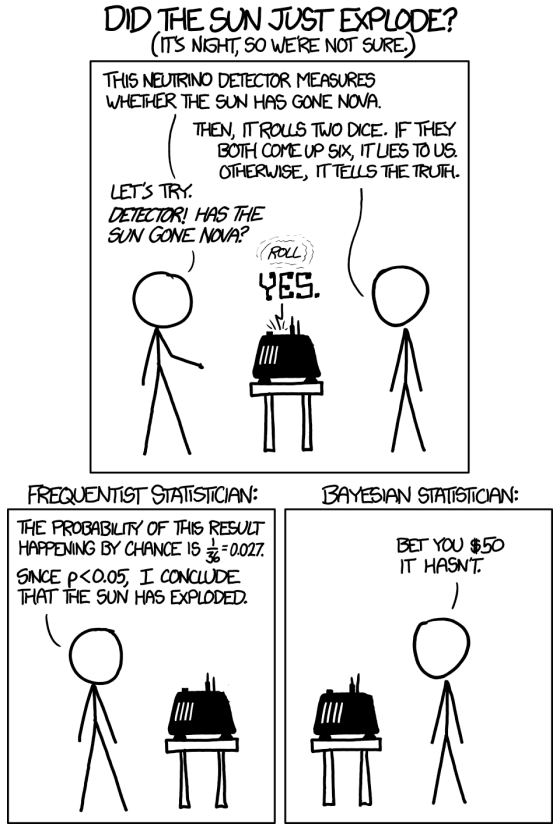
H_0 besagt, dass kein Effekt vorliegt (kein Unterschied, kein Zusammenhang, keine Veränderung).

Definition: Alternativhypothese

Besagt, dass ein (substanzieller) Effekt vorliegt — logisch meist das Gegenteil von H_0.

Beispiele: $H_0 : \mu = 100$; $H_0 : \rho = 0$; $H_0 : \pi = 0{,}5$; $H_0 : \beta_1 = 0$

Frequentist vs. Bayesianer



Pointe: Vorab-Information (Prior) wird im Frequentismus nicht berücksichtigt.

Zusammenfassung

- Populationsinferenz: von der Stichprobe auf die Population schließen
- Inferenz ist immer mit Ungewissheit behaftet — zwei Quellen: β und σ
- Konfidenzintervall = Schätzbereich statt Punktschätzer
- Frequentismus (p-Wert) vs. Bayes (Posteriori-Verteilung)
- Statistische Signifikanz: Null nicht im Schätzbereich enthalten

